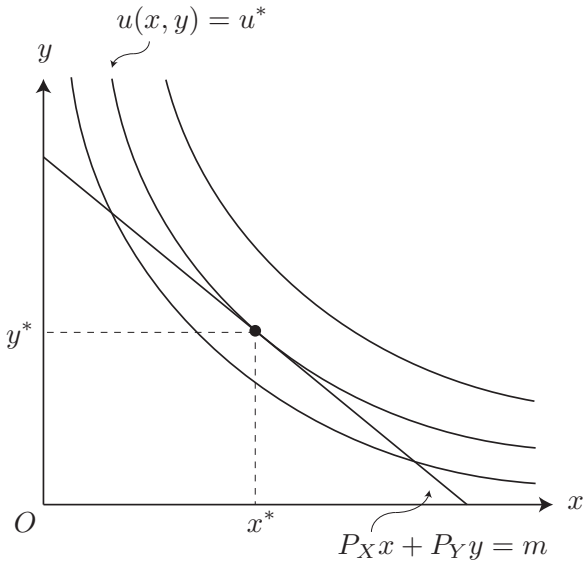
第 3 章

間接効用関数と労働供給

3.1　間接効用関数

これまでの議論では，効用関数 $u(x, y)$ を持つ消費者が，価格 P_X, P_Y および所得 m の下で，どのような最適消費量 (x^*, y^*) を選ぶのかについて，図を用いて考えてきた。そして，標準的な状況では，無差別曲線と予算制約線が接する点で最適消費量が決まっていた。図 3.1 は，このような標準的な状況を示している。

図 3.1　標準的な最適消費点



消費者は消費量 x, y を選択することができるので，最適消費点がどこになるかを決めているのは，価格 P_X, P_Y および所得 m ということになる。実際，商品の価格が変わったり，持っているお金の量が変わったりすると，購入する財の数は変化するだろう。言い換えると，価格 P_X, P_Y および所得 m が最適消費量を決定しているという見方をすれば，最適消費量は価格 P_X, P_Y および所得 m を変数に持つ関数であると考えることもできる。つまり，最適消費量は $x^*(P_X, P_Y, m)$, $y^*(P_X, P_Y, m)$ と表記することができる。

最適消費量が価格 P_X, P_Y および所得 m を変数に持ち，効用関数は消費量 x, y を変数に持つことから，最適消費点での効用は $u(x,y)$ に $x^*(P_X,P_Y,m)$, $y^*(P_X,P_Y,m)$ を代入し，$u[x^*(P_X,P_Y,m),y^*(P_X,P_Y,m)]$ と表すことができる。最適消費量はどちらも価格 P_X, P_Y および所得 m の関数であることから，最適消費点での効用も価格 P_X, P_Y および所得 m の関数となっている。そのため，表記を簡略化して，$u^*(P_X,P_Y,m)$ と表すこともある。このように，最適消費点における効用を価格と所得を変数として表現したものは，間接効用関数と呼ばれる。

定義 1　間接効用関数とは，最適消費点における効用を表す関数のことで，その変数に価格と所得を含むものである。

間接効用関数を利用すると，複雑な経済問題を簡略化することができる。その例として，次の労働供給問題を考えてみよう。

3.2　労働供給問題

3.2.1　設定

ある 1 人の労働者を考える。この労働者は労働することで所得を得ており，それを使って消費を行っているとしよう。労働者が選択可能な変数として，労働時間 l（labor-time），財 X の消費量 x，財 Y の消費量 y を考えよう。労働者が選択できない変数として，1 日の長さ（24 時間），財の価格 P_X, P_Y，時給（賃金）w（wage）を考える。労働者の嬉しさは遊ぶ時間の長さ o（off-time）と財の消費 x,y によって決まっているとする。したがって，労働者の効用関数は $u(o,x,y)$ で表される。このような設定の下で，労働者の行動について分析してみよう。

3.2.2　問題の簡略化

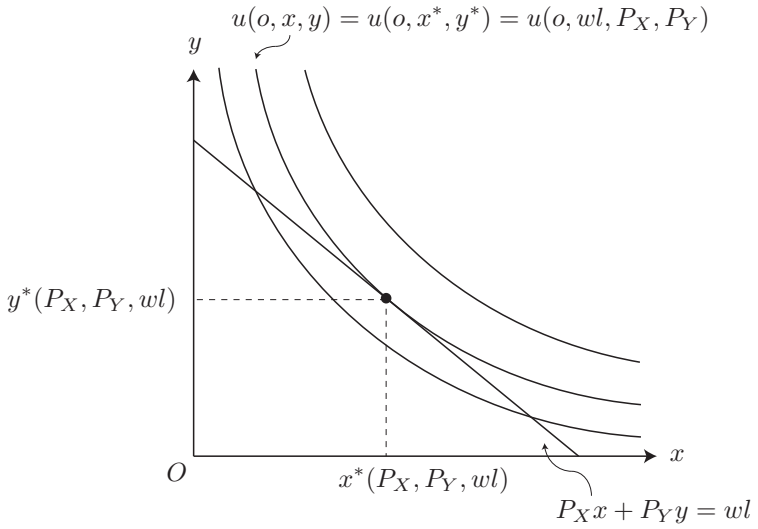
この労働者が財を購入するためには，所得 m が必要である。所得が決まれば，これまでの分析と同様に，最適消費量を求めることができる。ここでは，労働によって所得を得ている状況を考えており，労働者は時給 w で l 時間働くので，所得は $m = wl$ と表すことができる。すると，予算制約式は次式となる。

$$P_X x + P_Y y \leq wl.$$

1 日の行動を分析しており，明日の存在は無視しているため，労働者は貯蓄をせずに所得を使い切るだろう。したがって，この予算制約式は等号で成立し，$P_X x + P_Y y = wl$ となるはずである。この予算制約式は，これまで考えてきた予算制約式に $m = wl$ を代入しただけのものである。したがって，最適消費点を図示する場合にも，m を wl に置き換えれば良いので，図の形状は変わらないことに注意すると，次の図 3.2 を得る。

図の中では，最適消費点が $x^*(P_X,P_Y,wl)$ および $y^*(P_X,P_Y,wl)$ として描かれてい

図 3.2　最適消費点：所得が $m = wl$ のケース



る。また，これを効用関数 $u(o,x,y)$ に代入したものが $u(o,wl,P_X,P_Y)$ である。

ここで，労働者は価格 P_X, P_Y および賃金 w を変更できないものとして考えていることを思い出そう。すると，最適消費点を考えた後において，消費者の効用を決めているものは，遊ぶ時間（余暇）o と労働時間 l となっている。また，1 日は 24 時間であることから，遊ぶ時間と労働時間の和は 24 になるはずなので，$o + l = 24$ を得る。したがって，労働時間を決めると，自動的に遊ぶ時間が決まる[*1]。よって，この労働者の直面している問題は，単に労働時間を選ぶだけということになる。労働時間 l を選択すると，自動的に所得が $m = wl$ として決まり，また遊ぶ時間が $o = 24 - l$ として決まる。所得が決まると，自動的に効用を最大にする消費量 x^* および y^* が決まる。このように，問題を労働と消費のように個別に分けて解いてしまえば，問題が簡略化され，分析しやすくなることが分かる。

3.2.3　間接効用関数を用いた簡略化

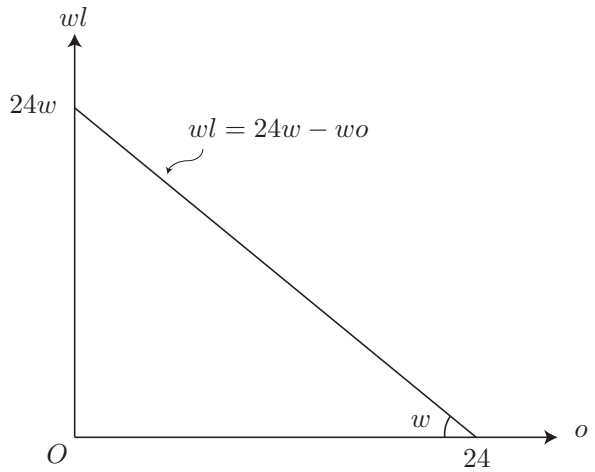
先ほど説明した，間接効用関数を用いて労働供給問題を簡略化してみよう。まず，労働者は遊ぶ時間 o から受ける嬉しさ $u(o)$ と財の消費 (x,y) から受ける嬉しさ $v(x,y)$ を考えて行動するとしよう。その際の効用関数を $U[u(o),v(x,y)]$ で表すことにする[*2]。先ほどと同様に，財の消費による嬉しさは，財の価格 P_X, P_Y および所得 $wl(= m)$ によって決まるはずなので，最適消費点においては $v(x,y) = v(wl,P_X,P_Y)$ として嬉しさを表すことができる。この $v(wl,P_X,P_Y)$ が消費の間接効用関数となっている。

[*1] 例えば，労働時間を 10 時間とすると（$l = 10$），遊ぶ時間は 14 時間となる（$o = 24 - l = 24 - 10 = 14$）。

[*2] 分析をするためには，このように嬉しさを 2 つの関数 u と v に分ける必要性は必ずしもない。ただし，後の章で説明する企業の問題を考える際に，最適な値を代入した関数を用いるという方法は有用である。これについては，費用最小化問題と利潤関数の関係などを参照されたい。

また，遊ぶ時間 o と労働時間の和は $o + l = 24$ となり，これを変形すると $l = 24 - o$ となる。所得が wl であったことを思い出すと，$wl = w(24 - o) = 24w - wo$ を得る。これを所得 wl を縦軸に，遊ぶ時間 o を横軸にとった平面上に図示すると，次の図 3.3 となる。これは，労働供給問題における予算制約線である。この予算制約式は，遊ぶ時間と所得の関係を表している。

図 3.3　予算制約線



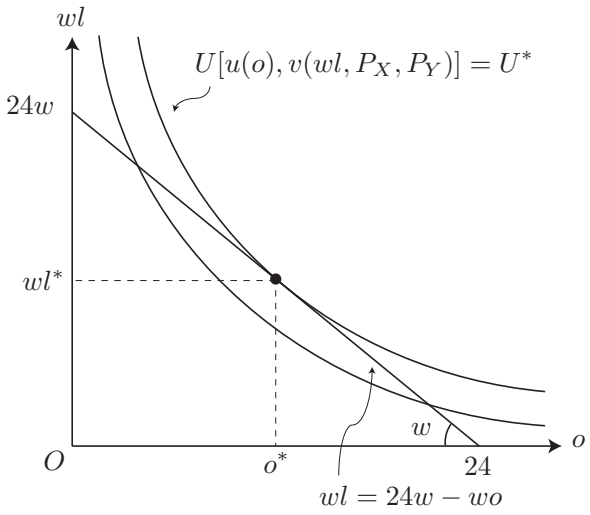
所得 wl は財の消費から受ける嬉しさ $v(wl, P_X, P_Y)$ を決めており，遊ぶ時間 o は余暇の嬉しさ $u(o)$ を決めている。24 時間働いて多くの所得を得ることや，全く働かずに何も消費できない状況を望ましくないと考える労働者を仮定すると，その労働者の無差別曲線はこれまでと同様に，原点に対して凸となり，次の図 3.4 を得る。この図において，予算制約線 $wl = 24w - wo$ と無差別曲線 $U[u(o), v(wl, P_X, P_Y)]$ が接する点において，遊ぶ時間 o^* と所得 wl^* が決まっていることが分かる。

3.2.4　賃金と労働供給量

賃金（時給）が低い状態で賃金が上がると，労働意欲を刺激し，たくさん働くようになるかもしれない。一方，十分に賃金が高い場合，さらに賃金が上昇すると，少し働くだけで十分な所得を得ることができるので，むしろ労働するより遊ぶことを重視するようになるかもしれない。このような状況を，さきほど図示しした最適消費点の軌跡を用いて考えることができる。

まず，予算制約線の図 3.3 において，賃金 w が上昇すると，どのような変化があるか考えてみよう。w は直線の切片と傾きの両方に含まれているが，横軸との交点は 24 であり，w と無関係である。したがって，w が上昇した場合，傾きは急になり，切片は上へ移動するが，横軸との交点は 24 のままで変化しない。このような予算制約線の動きと，各予算制約線に対する最適消費点を表したものが図 3.5 である。横軸を表す変数が o であり，1 日の時間は 24 時間であることから，労働時間は横軸の下側に書いてあるように

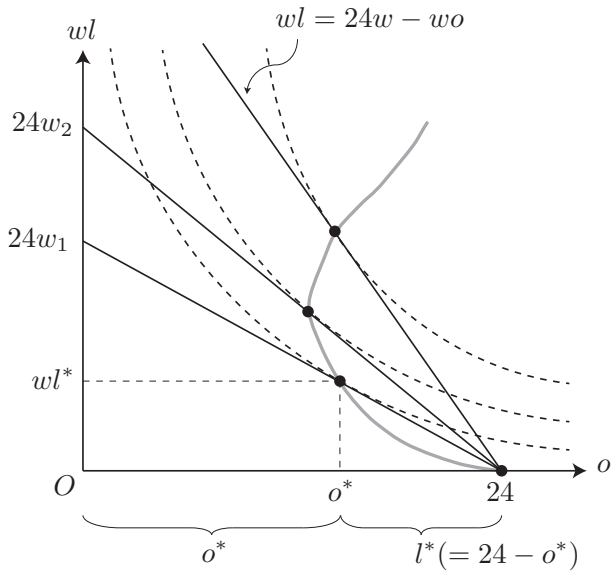
図 3.4　無差別曲線と最適消費点



$l^* = 24 - o^*$ のように求めることができる。

さて，賃金の変化と最適消費点の軌跡について考えてみよう。賃金が変化した場合，最適消費点の軌跡は，$(o, wl) = (24, 0)$ からスタートし，曲線上を初めは左上へ向かう。しかし，w がある程度大きくなると，最適消費点の軌跡は右上へ向かっていくことになる。これにより，賃金が低い場合，賃金の上昇は労働時間 l^* を増加させるが，賃金が高い場合，賃金の上昇は労働時間を減少させることが分かる。

図 3.5　賃金 w と労働供給量 l の関係



3.3　まとめ

この章では，3 種類以上の変数を選択する状況を分析する例として，労働供給の問題を扱った。図示する際のポイントは，間接効用関数を利用して，2 次元の図にすることであった。基本的な手順をまとめると以下のようになる。

1. 効用関数を定義し，経済主体（消費者など）が選択可能な変数が何なのかを明確にする。
2. 労働と消費といったように，経済主体の行動をグループ分けし，個別に効用最大化の状況を図示する。
3. 各グループ分けした結果を間接効用関数にまとめて，効用関数に含まれる変数の種類を減らす。
4. 効用関数に含まれる変数の種類を 2 種類にし，その変数に対する予算制約式を作る。
5. 無差別曲線と予算制約線を図示し，最適消費点を求める。
6. 外部の環境（賃金など）が変化した場合，最適消費点がどのように動くのかを図示することで考える。

■課題　労働供給の分析では，消費者は労働時間，財 X の消費量，財 Y の消費量といった 3 種類の変数を選択していた。このように，経済主体（消費者など）が 3 種類以上の変数を選択する事例を考え，間接効用関数を利用しながら最適消費量を図示しなさい。解答の分量は，A4 の紙に 2 枚程度を想定している。

この課題の主な目的は，3 種類以上の変数に対する処理を学ぶという技術的なものである。そのため，考える事例は，できれば法的な問題に関わる方が望ましいが，それが難しい場合には法律に関わらない問題でも良い。

3.4　発展：効用最大化問題の数学的表現

ここまでの議論では，数式を用いてはいたものの，実際の計算はほとんど行っていなかった。数学に苦手意識がない人にとっては，これまでのような図的な説明よりも，計算による説明の方が理解が進むこともあるだろう。そのため，この節では，これまで考えてきた効用最大化問題を数式を用いて定義し，その結論を計算により導出する。以下の議論は，この講義の試験範囲を超えるため，その全てを理解する必要はない。ただし，経済学の論文を読む際には有用であるので，可能であれば目を通しておくことをすすめる。

■一般的な表現　効用最大化問題は，予算制約式 $P_X x + P_Y y \leq m$ を満たす x, y の中で $u(x, y)$ を最大にするものを探すという問題である。これを数式で表すと次式となる。

$$\max_{x,y} u(x,y) \quad \text{s.t.} \quad P_X x + P_Y y \leq m.$$

最初の max が最大化問題であることを表しており，max の下にある x, y がどの変数で最大化を行うのかを表している。$u(x,y)$ では最大化する関数が何なのかを表しており，s.t. は subject to や such that のことであり，「ただし，以下の条件満たす」ということを意味している。この $u(x,y)$ を目的関数と呼ぶことがある。最後に，この s.t. 以下にある $P_X x + P_Y y \leq m$ が選択可能な x, y の条件を定めている。

基本的に効用最大化問題はこのような数学的によって表される。以下では，目的関数 $u(x,y)$ の形を具体的に定め，最適消費量を数式で求めてみよう。

■コブ=ダグラス型　最初に考える目的関数の形はコブ=ダグラス型であり，それは次式で表される。

$$u(x,y) = cx^a y^b.$$

ただし，$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする。コブ=ダグラス型効用関数の例として $u(x,y) = xy$ や $u(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$ などが考えられる。

コブ=ダグラス型効用関数の効用最大化問題の例を数式で表すと次式となる。

$$\max_{x,y} xy \quad \text{s.t.} \quad P_X x + P_Y y \leq m.$$

これを解くためには，予算制約式を等号で成立させ，それを x や y について解き，目的関数に代入する必要がある。まず，予算制約式を等号で成立させ，y につい解くと次式となる。

$$y = -\frac{P_X}{P_Y}x + \frac{m}{P_Y}.$$

これを目的関数に代入すると，効用最大化問題は次式のようになる。

$$\max_{x} x\left(-\frac{P_X}{P_Y}x + \frac{m}{P_Y}\right).$$

この式では，予算制約式を目的関数に代入することで，変数 y を消去していることに注意しよう。

さて，この効用最大化問題は，変数 x のみで記述されているので，これを最大にする x を求めるためには，目的関数を x で微分し，ゼロとすれば良い。実際に計算してみると，以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x\left(-\frac{P_X}{P_Y}x + \frac{m}{P_Y}\right)\right] &= 0 \\
\left(-\frac{P_X}{P_Y}x + \frac{m}{P_Y}\right) + x\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right) &= 0 \\
\frac{m - P_X x - P_X x}{P_Y} &= 0 \\
m - 2P_X x &= 0
\end{aligned}$$

以上より，求める x の値は次式となる。

$$x^* = \frac{m}{2P_X}.$$

これを予算制約式を y について解いた式に代入すると，次式を得る。

$$\begin{aligned} y &= -\frac{P_X}{P_Y}\frac{m}{2P_X} + \frac{m}{P_Y} \\ &= \frac{-m+2m}{2P_Y} \end{aligned}$$

以上より，求める y の値は次式となる。

$$y^* = \frac{m}{2P_Y}.$$

以上で求めた，x^* や y^* は価格や所得と最適消費点の関係を表しているので，需要関数であると言える。また，最適消費点の軌跡は次式で与えられる。

$$(x, y) = \left(\frac{m}{2P_X}, \frac{m}{2P_Y}\right).$$

これは価格や所得が変化した場合，最適消費点がどのように動くかを表しているので，価格消費曲線や所得消費曲線を表している。

一般的なミクロ経済学の教科書には，このような数式による分析がなされている。その他の需要関数や労働供給問題などが，数式でどのように解かれているかを確認してみると理解が深まるだろう。その際には，「限界代替率」と「価格比」という概念を理解する必要があるので，計算を行う前にこれらの用語の意味の図的な理解を行っておくと良いだろう。