第 4 章

費用最小化・利潤最大化

企業は労働者を雇い，設備投資を行い，生産を行っている。企業の行動を分析するためには，労働者の数，設備投資の量，生産量がどのように決まるのか知る必要がある。このような企業行動に関する問題を明確にするために，企業が選択できる変数や利潤を数式で表してみよう。

企業が雇う労働者の量を L，1 単位[*1]の労働者を雇用する賃金を w としよう。また，設備投資の量を K，1 単位の設備投資の価格を r とする。労働者を L ほど使い，設備投資を K ほど行った場合の生産量を $y = f(L, K)$ で表すことにする。さらに，価格を p，企業の利潤を π とする[*2]。すると，利潤最大化問題は次式のように表すことができる。

$$\max_{L,K,y} \quad py - wL - rK \quad \text{s.t.} \quad y = f(L, K).$$

この数式の max は最大化問題であることを表しており，max の下に書かれた L, K, y は選択可能な（自分で動かすことのできる）変数が何であるかを示している。次に，max の右にかかれている数式が，この問題において最大化される数式であり，これを目的関数と呼ぶ。目的関数の 1 項目は価格と生産量の積であり，収入を表している。2 項目と 3 項目は生産に必要な投入物（労働力と資本設備）の量とその価格の積であり，費用を表している。

また，この式の中にある s.t. は「ただし，以下の条件を満たす」と読む。この式では，y, L, K は自由に選ぶことができるのではなく，$y = f(L, K)$ を満たすように選ばなければならないことを示している。

この利潤最大化問題に含まれる変数は 3 つあり，このままでは分析が難しいので，労働供給問題の時と同様に，問題を分割して考えることにする。まず，企業がある生産量 y を生産しようと思った場合，その生産量を達成できる最も安い生産方法（L と K の投入量）を選ぶはずである。そこで，次節では，生産量 y を与えられたものとして，費用を最小に

[*1] 単位は分析によって異なるが，標準的な単位は人数や労働時間であろう。

[*2] 一般に，価格は企業が操作できると考えられるかもしれないが，ここで用いている価格は相場のようなものであり，企業はその相場を変更する能力を持ち合わせていない状況を仮定している。このように，価格を操作できず，与えられたものとして考える経済主体のことを，プライステイカーと呼ぶ。

する投入量を図示してみよう。

4.1　費用最小化

まず，生産関数について定義しておく。

定義 1　生産関数とは，投入物の量と生産量の関係を表す関数のことである。

4.1.1　等量曲線

この講義では，労働量 L と資本量 K という 2 種類の投入物を想定しているので，生産関数 $f(L, K)$ は 3 次元空間上の曲線として表すことができる。これは，効用関数 $u(x, y)$ のケースと同じような状況であるので，等高線に似た概念を用いて表現すると便利であろう。効用関数における等高線を無差別曲線と呼んでいたように，生産関数における等高線は等量曲線と呼ばれる。生産関数の形状によって，等量曲線の形は異なるが，ここでは，図 4.1 のような等量曲線を考えてみよう。

定義 2　等量曲線とは，ある生産量を固定し，その量を生産する投入物の組み合わせを表す曲線である。

図 4.1　等量曲線

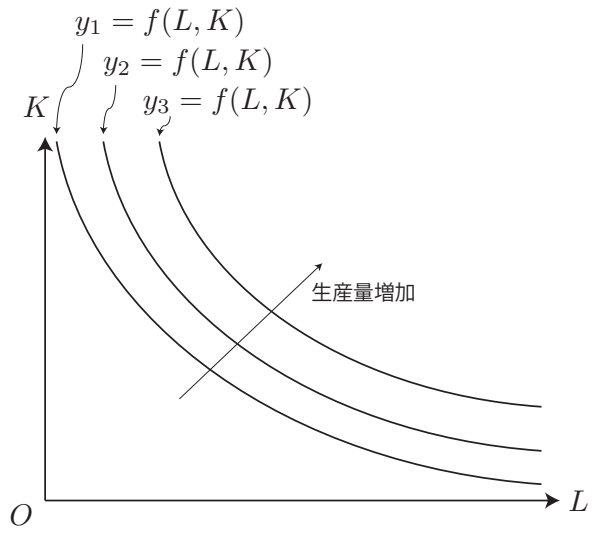


図 4.1 では，横軸に労働量，縦軸に資本設備量をとっている。どちらの量も多いほど生産量を増やす効果があるので，図の右上ほど生産量が多くなっている。この図の中には，異なる 3 つの生産量 y_1, y_2, y_3 に対する等量曲線が描かれており，右上の等量曲線ほど生産量が多いので，$y_1 < y_2 < y_3$ となっている。

4.1.2　等費用線

効用最大問題の場合と同様に，最適な労働量と資本設備量を求めるためには，費用を表す線を描く必要がある。この線は等費用線と呼ばれ，次のように定義されている。

定義 3　等費用線とは，ある費用の大きさに固定した状態で，その費用になるような投入物の組み合わせを表す線である。

費用を C とすると，労働量は L，労働 1 単位あたりの賃金は w，資本設備量は K，資本設備 1 単位あたりの価格は r とすると，この等費用線は次式のように表すことができる。

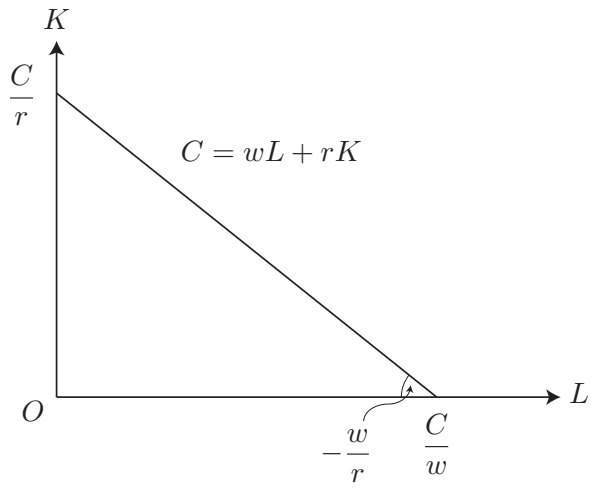
$$C = wL + rK.$$

これを等量曲線の図に描きいれたいので，縦軸が K であったことを思い出し，K について解くと，次式をる。

$$K = -\frac{w}{r}L + \frac{C}{r}.$$

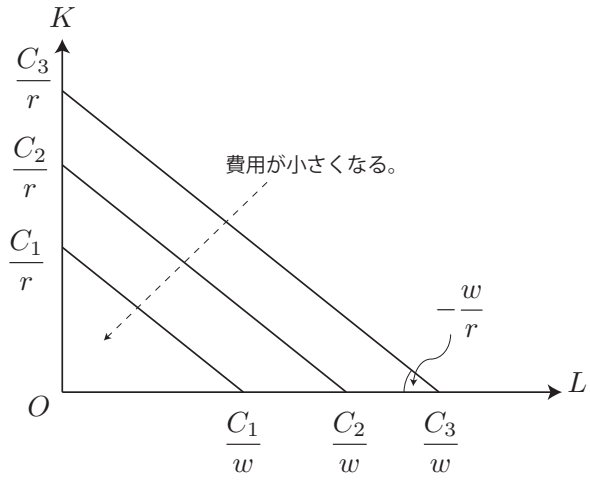
したがって，これは切片 C/r，傾き $-w/r$ の直線であるので，縦軸 K，横軸 L の平面上に図示すると，次の図 4.2 となる。

図 4.2　等費用線



等費用線は $K = -(w/r)L + C/r$ で表されるので，費用 C が大きいということは，この等費用線の切片が上にあるということである。また，費用 C が変化しても傾き $-w/r$ は変化しない。したがって，費用が増加すると，等費用線は上に平行移動し，費用が減少すると等費用線は下に平行移動することになる。このような状況を図示したのが図 4.3 となる。この図において，費用の大きさは $C_1 < C_2 < C_3$ となっている。

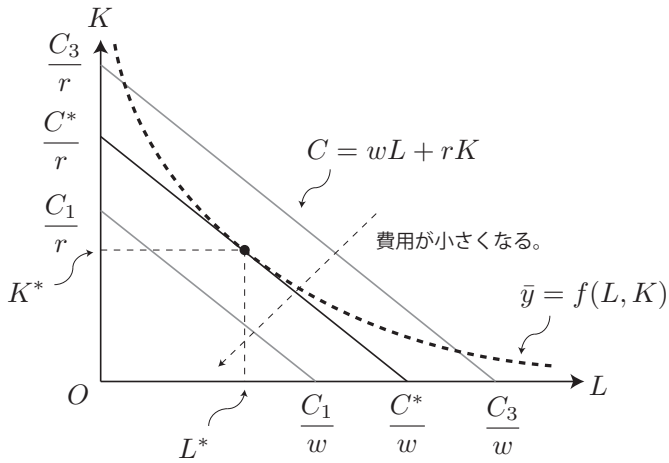
図 4.3　費用の大きさと等費用線



4.1.3　費用最小化

等量曲線と等費用線を縦軸 K 横軸 L の平面上に描くことができたので，この 2 つのグラフを使って，費用最小化問題を考えてみたい。費用最小化問題は，与えられた生産量を達成するのに，最も安く生産できる投入物（労働量と資本設備量）の組み合わせを求める問題である。したがって，生産量を固定する必要があるので，ここでは生産量を $\bar{y}$ としよう。このとき，等量曲線と等費用曲線を重ねあわせてみると，次の図 4.4 を得る。

図 4.4　費用最小化問題



効用最大化問題の場合と異なり，企業は等量曲線上の投入物の組み合わせを選択することができる[*3]。この図では，生産量を $\bar{y}$ に固定することで，等量曲線 $\bar{y} = f(L, K)$ を描い

[*3] 効用最大化問題の場合，等量曲線の位置にあったものは無差別曲線であったが，無差別曲線上の最適な点

ている。また，等費用線は，効用最大化問題の予算制約線のように右下がりの直線として描かれている。この等費用線の切片が大きいほど，大きな費用が必要となる。

さて，このように等量曲線と等費用線を図示すると，費用が最小化される投入物の組み合わせを見つけることができる。それは，図の中で，点 (L^*, K^*) として描かれている。実際，等量曲線上で最も費用の小さい投入物の組み合わせになっていることが分かるだろう。

費用を最小化する投入物の組み合わせは，投入物の価格（労働 1 単位あたりの賃金 w や資本設備 1 単位あたりの価格 r）や固定する生産量 y によって変わってくる。以下の議論では，基本的に生産量が変化する状況に着目するので，この最適な投入物の組み合わせを $L^*(y)$ および $K^*(y)$ で表すことにしよう[*4]。

■練習問題

1. 労働 1 単位あたりの賃金が w から w' に上昇したとしよう。このとき，費用を最小にする労働量 L と資本設備量 K はどのように変化するか図示しなさい。
2. 資本設備 1 単位あたりの価格が r から r' に上昇したにもかかわらず，費用を最小にする資本設備の量が増えてしまう状況が存在するか考えなさい。
3. 労働 1 単位あたりの賃金と資本設備 1 単位あたりの価格が 2 倍になったとする。つまり，w と r から $2w$ と $2r$ になったとする。このとき，費用を最小にする労働量 L と資本設備量 K がどうなるか説明しなさい。

4.2　様々な費用

■費用：$C(y)$　費用最小化問題の解である $L^*(y)$ および $K^*(y)$ を費用 $C = wL + rK$ に代入すると，費用は生産量 y とともに変化することになる。そのため，費用が生産量 y によって変わることを明示的に示すために，費用を $C(y) = wL^*(y) + rK^*(y)$ と表すことにしよう[*5]。この $C(y)$ は費用関数と呼ばれている。

定義 4　費用関数とは，与えられた生産量を達成するために必要な最小の費用を表す関数である。

最初に定める生産量が大きくなると，選ばれる等量曲線は右上のもととなる。したがって，それを生産するために必要な投入量が増えるので[*6]，最低限必要な費用の値も上昇するだろう。これを図示したのが，図 4.5 である。

を探していたわけではない。予算制約線上の最適な点を探していたことに注意されたい。

*4 最適な投入物の組み合わせが，労働 1 単位あたりの賃金 w，資本設備 1 単位あたりの価格 r，固定された生産量 y によって変わることを明示的に表す場合，$L^*(y, w, r)$, $K^*(y, w, r)$ という表記を用いても良い。

*5 これは，効用最大化問題における，間接効用関数に対応している。

*6 最初に定める生産量が大きくなったとしても，全ての投入量が増加するわけではない。これは様々な等量曲線を図示するとこで，ある投入量が減少する場合を発見することできる。

図 4.5　生産量の増加と費用の増加

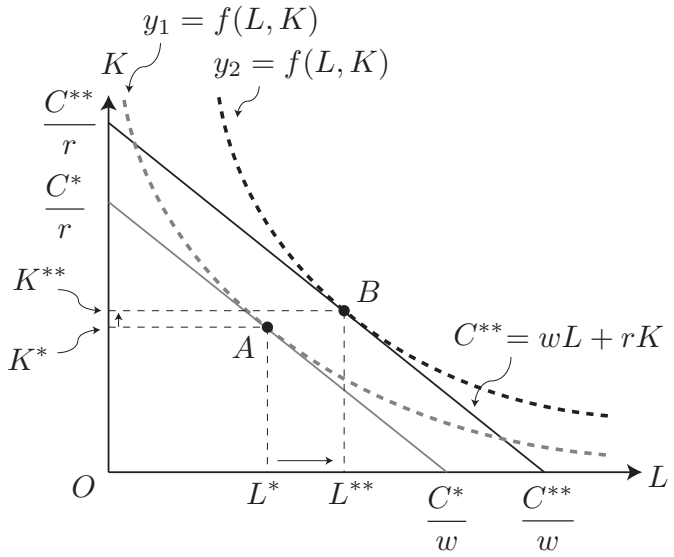
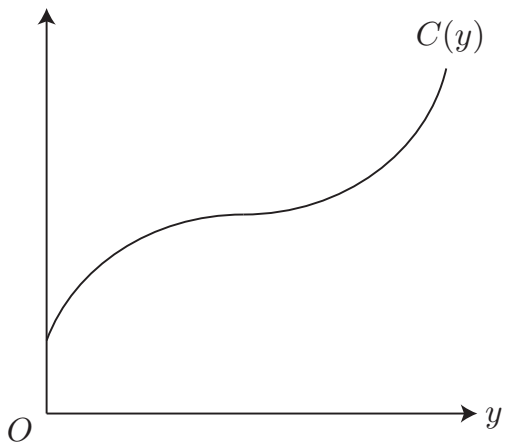


図 4.5 では，生産量を増やす前の水準 y_1 において，最適な投入物の量は (L^*, K^*) となっており，生産量を増やした後の水準 y_2 において，最適な投入物の量は (L^{**}, K^{**}) となっている。また，生産量が増えることによって，必要な費用も C^* から C^{**} に増えていることが確認できる。

以上の議論から，生産量が増えるとそれを実現するための費用も増えることが分かった。しかしながら，生産量が 1 単位増えた場合，費用がどの程度増えるのかは，図の描き方によって変わる。ここで，分かったことは，横軸を生産量とし，縦軸を費用とすると，生産量と費用の関係は右上がりの曲線として表すことができるということである。どのような形になるか分からないので，ここでは，次の図 4.6 で表される費用を想定しよう。

図 4.6　費用曲線



定義 5　費用曲線とは，与えられた生産量とそれを達成するために必要な最小の費用の関

係を表す曲線である。

■選択可能な費用水準　効用最大化問題において，消費可能領域を描いたように，ここでも選択可能な費用の領域を描いてみよう。

まず，費用最小化問題では，生産量 y が与えられた状態で，費用を最小にすることを考えた。したがって，同じ生産量であったとしても，非効率な投入物の組み合わせを選択すれば，より大きな費用で生産することは可能である。つまり，図 4.6 における曲線 $C(y)$ より上の領域は，非効率な投入物の組み合わせとして，選択可能であることが分かる。選択可能な領域を図示すると次の図 4.7 の斜線部となる。

図 4.7　選択可能な費用の領域

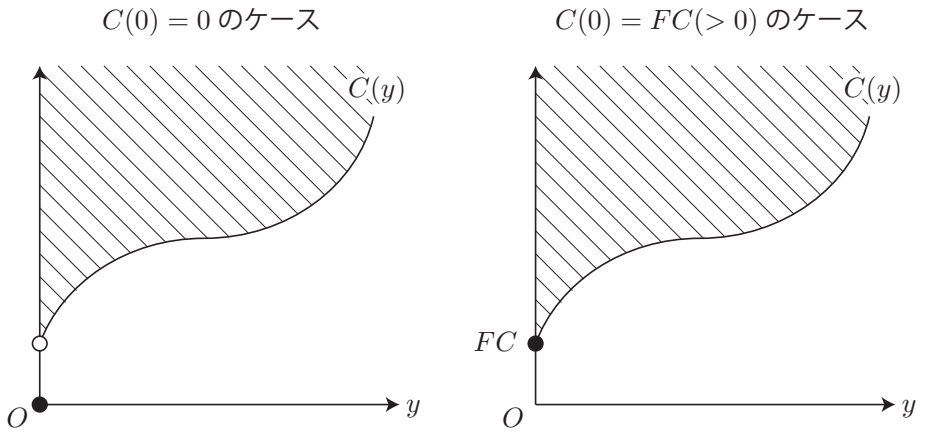


図 4.7 の左側は，生産量を $y = 0$ とした場合，費用がゼロになるケース（$C(0) = 0$）を表しており，右側は $y = 0$ としても，費用がゼロにならないケース（$C(0) > 0$）を表している。一見すると，生産を行わない場合（$y = 0$ の場合）は，費用がゼロになりそうであるが，それが成立しない場合も考えられる。例えば，企業があるビルを借りており，そこに本社を置くと，生産量がゼロであっても賃借料が発生する。このような場合，$y = 0$ であっても，$C(0) > 0$ となるのである。

したがって，$C(0) = 0$ の場合，原点 O を選択することができるが，$C(0) = FC(> 0)$ の場合，原点 O を選択することができなくなる。

■固定費用：FC　固定費用の概念は既に図 4.7 において出てきており，その定義を行うと次のようになる。

定義 6　固定費用 FC とは，生産量がゼロとなる場合に必要な費用のことである。また，費用を $C(y)$ で表すと，$FC = C(0)$ と定義することができる。

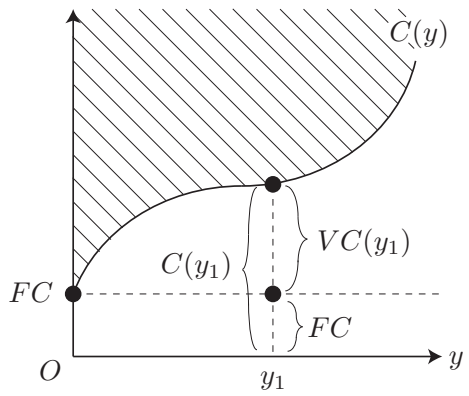
固定費用は図 4.7 における FC のことである。

■可変費用：$VC(y)$　可変費用は次のように定義できる。

定義 7　可変費用 $VC(y)$ とは，費用 $C(y)$ から固定費用 FC を除いた部分である。また，$VC(y) = C(y) - FC$ と定義することができる。

可変費用を図示すると，次の図 4.8 となる。

図 4.8　可変費用



この図では，生産量 $y = y_1$ における可変費用が描かれている。また，固定費用 FC と可変費用 $VC(y_1)$ の和が費用 $C(y_1)$ になっていることが分かる（$C(y_1) = FC + VC(y_1)$）。

■平均費用：$AC(y)$　平均費用の定義は次のようになる。

定義 8　平均費用 $AC(y)$ とは，費用 $C(y)$ を生産量 y で割ったものである。また，数式を用いて，

$$AC(y) = \frac{C(y)}{y}$$

と定義することもできる。

平均費用は，1 単位の生産を行うために，平均どれくらいの費用が必要かを表したものである。平均費用を図示すると，次の図 4.9 となる。

平均費用は $AC(y) = C(y)/y$ と定義されているので，図的に表現すると，原点と費用曲線上の点を結んだ直線の傾きが平均費用となることが分かる。

■平均可変費用：$AVC(y)$　平均可変費用の定義は次のようになる。

定義 9　平均可変費用 $AVC(y)$ とは，可変費用 $VC(y)$ を生産量 y で割ったものである。また，数式を用いて，

$$AVC(y) = \frac{VC(y)}{y}$$

と定義することもできる。

平均可変費用は，1 単位の生産を行うために，平均どれくらいの可変費用が必要かを表したものである。平均可変費用を図示すると，次の図 4.10 となる。

図 4.9　平均費用

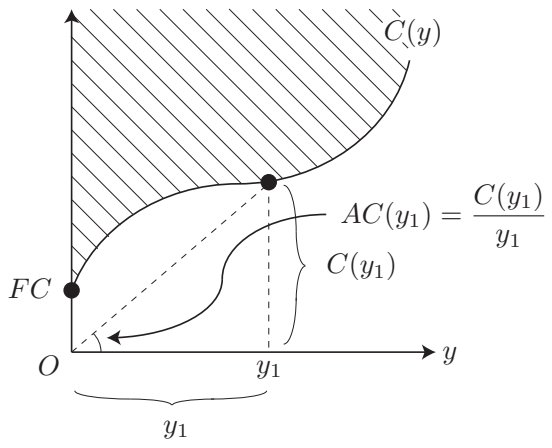
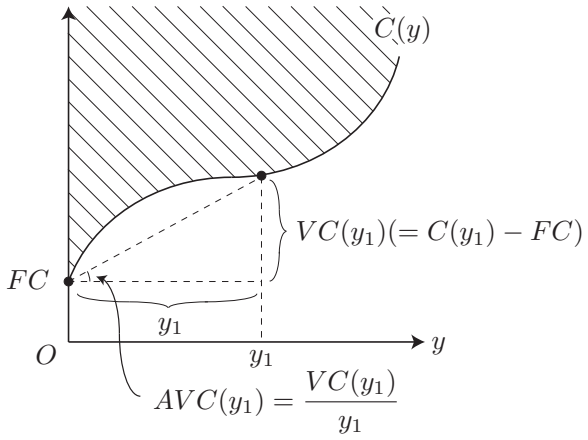


図 4.10　平均可変費用



平均可変費用は $AVC(y) = VC(y)/y$ と定義されているので，図的に表現すると，費用曲線の切片と費用曲線上の点を結んだ直線の傾きが平均可変費用となることが分かる。

■限界費用：$MC(y)$　限界費用の定義は次のようになる。

定義 10　限界費用 $MC(y)$ とは，生産量を 1 単位増加させた場合，費用が何単位変化するかを表したもの。数式で定義すると，

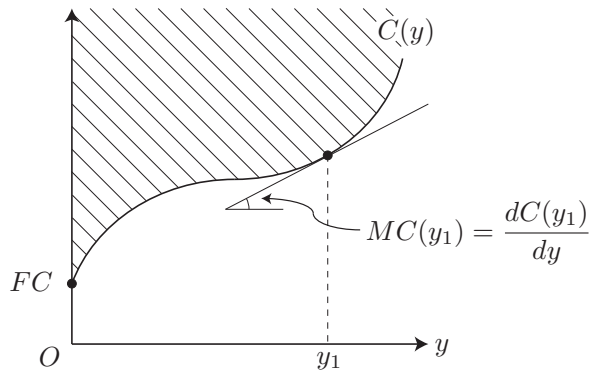
$$MC(y) = \frac{dC(y)}{dy}.$$

限界費用は微分によって定義されるので，微分の意味から，限界費用とは費用曲線の接線の傾きであるといえる。限界費用を図示すると，次の図 4.11 となる。

■練習問題

1. 平均費用が最小となる生産量において，平均費用と限界費用の値が等しくなることを図を用いて説明しなさい。

図 4.11　限界費用



2. 平均可変費用が最小となる生産量において，平均可変費用と限界費用の値が等しくなることを図を用いて説明しなさい。

4.3　利潤最大化

費用最小化の結果，y の量だけ生産したいなら，費用は $C(y)$ 必要であることが分かった。最初に考えていた利潤最大化の式は，$\max_{L,K,y}\ py - wL - rK$ s.t. $y = f(L, K)$ であったが，費用最小化の結果を利用すれば，y を選んだ時点で自動的に $L^*(y)$ と $K^*(y)$ が選ばれ，その結果，$C(y) = wL^*(y) + rK^*(y)$ の費用が決まることになる。したがって，最初に提示した利潤最大化の式は次のように書き換えることができる。

$$\max_{y}\ py - C(y)\,(= py - wL^*(y) - rK^*(y))\,.$$

よって，利潤最大化の問題は，生産量 y のみを選択する問題として書き換えることができたのである。以下では，利潤を最大にする生産量がどのように決まるのかを考えていく。これを行うために，消費者の効用最大化問題で扱った予算制約線と無差別曲線の概念を応用する。企業の利潤最大化問題における予算制約線は，これまで説明してきた費用曲線であり，消費化領域は費用曲線の線上および上側の領域に対応している。残った概念として，以下では効用最大化問題における無差別曲線の概念に相当する，等利潤線について考えてみよう。

4.3.1　等利潤線

定義 11　等利潤線とは，利潤が等しくなる要素の組み合わせを表したものである。

この講義では，費用曲線を予算制約線として見るので，図は横軸に生産量 x，縦軸に費用 $C(y)$ をとっている。そのため，等利潤線もこれらの軸を使って描くことになる[*7]。等

[*7] この資料のような等利潤線の書き方は，通常の経済学の教科書では行われていない。この講義では，予算

利潤線を描くためには，利潤を定義しなければならない。

定義 12　利潤とは，収入と費用の差のことである。

利潤は生産量とともに変わっていくので，生産量の関数であることを明示的に表し，$\pi(y)$ と表記することにしよう[*8]。同様に収入も生産量とともに変化するので，$R(y)$ と表すことにする[*9]。すると，利潤は収入と費用の差であるので，次式のようになる。

$$\pi(y) = R(y) - C(y).$$

収入は価格と生産量（販売量 =）の積によって表されるが，分析を続けるためには，さらに仮定が必要となる。それは，プライステイカーの仮定である。

定義 13　プライステイカーとは，自分が行動を変えても価格は変化しないと考える経済主体のことである。

定義 14　経済主体とは，消費者，企業，政府など，経済において何らかの行動をしているものことである。

経済主体（ここでは企業）が行動した結果，価格が変動したとしても，その経済主体が行動を行う時に，自分で「価格は変わらない」と信じている場合，その経済主体はプライステイカーである。プライステイカーの仮定は，実際に価格が変化するかが重要なのではなく，経済主体がどのように信じているかが重要なのである。

さて，プライステイカーの仮定を導入すると，収入は価格 p と生産量 y を用いて，$R(y) = py$ と表すことができる。このとき，利潤は $\pi(y) = py - C(y)$ と表される。一方，プライステイカーの仮定を用いない場合，生産量とともに価格が変化することを考慮しなければならないので，価格は生産量の関数として $p(y)$ と表される。したがって，この場合の収入は $R(y) = p(y)y$ と書くことになる。プライステイカーの仮定を用いない状況の分析は，もう少し後の章で説明する。

収入が $R(y) = py$ と表すことができると分かったので，これを横軸に数量をとっていた先ほどの費用曲線の図に描きいれてみよう。すると，次の図 4.12 を得る。

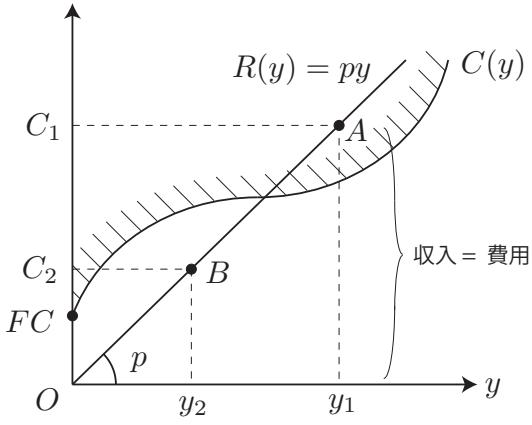
通常の経済学の教科書では，この図における，収入曲線と費用曲線の差が利潤となる。しかしながら，ここでは，描きいれた直線を収入として見るのではなく，直線上の点が生産量と費用の組み合わせを表していると考える。まず，点 A を見てみよう。点 A では，生産量が y_1 であり，費用は C_1 となっている。この点 A は費用曲線の上側にあるので，選択可能な生産量と費用の組み合わせである。一方，点 B では生産量が y_2 であり，費用が C_2 となっている。点 B は費用曲線の下側にあるので，このような組み合わせは選択す

制約線と無差別曲線の概念を重視しているので，少し無理して等利潤線を描いていることに注意されたい。

[*8] 利潤は英語で profit と書く。そのため頭文字の p を使って $p(y)$ と書いても良いのだが，p は価格も表すので，混乱を生じる。それを避けるために，p に対応するギリシャ文字の π を使っている。

[*9] 収入は英語で revenue と書くため，頭文字の r を使って $R(y)$ と表記している。

図 4.12　収入，費用，等利潤線



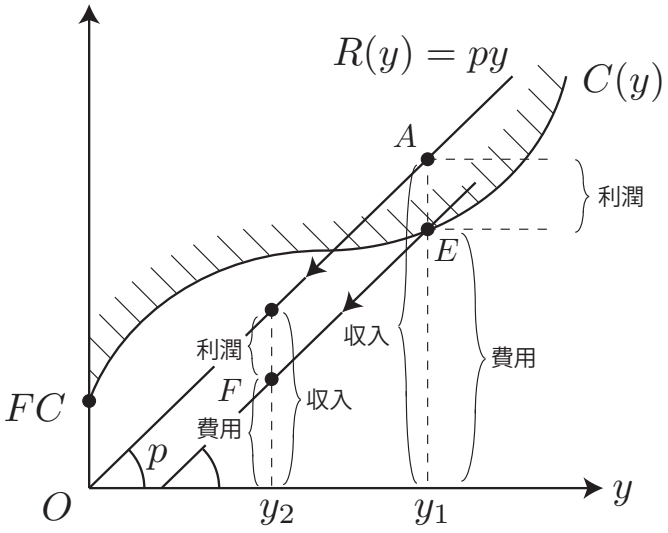
ることができない。

次に，点 A における利潤について考えてみよう。ここでは，利潤が $\pi(y) = py - C(y)$ と表されていたことを思い出そう。すると，点 A では，生産量が y_1 で費用が C_1 であったので，利潤は $\pi(y_1) = py_1 - C_1$ となる。ここで点 A の高さは py_1 に等しく，これは収入を表している。これがちょうど C_1 に等しいのであるから，$py_1 = C_1$ を利潤の式に代入すると，$\pi(y_1) = py_1 - C_1 = C_1 - C_1 = 0$ となる。したがって，この講義では点 A における利潤はゼロとなる。点 B は費用の条件から選択することはできないが，もし選択できたとすると，同様の議論から $\pi(y_2) = py_2 - C_2 = C_2 - C_2 = 0$ となり，この点においても利潤がゼロになる。この図において，直線 $R(y) = py$ 上は全て収入と費用が等しくなる点となっているので，費用がゼロとなる。したがって，費用がゼロになる等利潤線はこの図の直線 $R(y) = py$ となる。

等利潤線が 1 本描けたが，その他の等利潤線はどのようになるか考えてみよう。まず，先ほどの図 4.12 の点 A から真下に移動した点を考えてみる。すると，図 4.13 の点 E となる。

まず，点 E での利潤を考えてみよう。点 E での生産量は y_1 であり，その時の費用は費用曲線上の点であるので，$C(y_1)$ となっている。したがって，点 E での利潤は $\pi(y_1) = py_1 - C(y_1)$ となる。図より，収入の方が費用より大きいことが分かるので，点 E での利潤 $\pi(y_1)$ は正となる。同様に，利潤がゼロとなる等利潤線を点 E を通るように平行移動させて描いた直線上の点は，全て同じ利潤を得ることになる。これを確かめるために，点 F を考えてみる。点 F では生産量が y_2 であり，費用は点 F の高さとして表される。一方，収入は $R(y_2) = py_2$ として求められるので，利潤ゼロの等利潤線上の点となる。したがって，点 F における利潤は，収入と費用の差をとり，図のようになる。この利潤の大きさは，先ほど求めた点 E での利潤の大きさ（点 A と点 E の距離）に等しい。この直線上のその他の点においても同様に議論が成立するので，点 E を通り，$R(y) = py$ に平行な直線上の点は全て同じ利潤をもたらす。しかしながら，費用に関する制約があるので，実際に選択可能な利潤は費用曲線の上側となる。つまり，同じ利潤であっても，点

図 4.13　複数の等利潤線



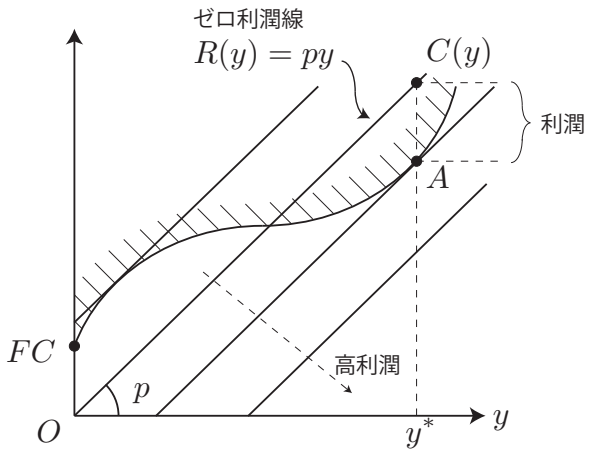
E は選択可能であるが，点 F は選択できないのである。

以上の議論から，費用曲線を描いた図において，等利潤線は $R(y) = py$ と並行に描くことができ，下側の直線ほど高い利潤をもたらしていることが分かった。

4.3.2　利潤最大化

等利潤線の描き方が分かったので，利潤を最大にする生産量を図から求めることが可能となった。つまり，効用最大化の場合と同様に，選択可能な生産量と費用の中から，最大の利潤を与える点を見つければ良いのである。そのために，費用曲線の図に等利潤線をいくつか描いてみよう。すると，図 4.14 を得る。

図 4.14　複数の等利潤線



この図において，利潤が最大化される生産量は y^* である。その理由は，企業が選択可

能な生産量と費用の組み合わせは，費用曲線の上側であり，その中で最も下側の等利潤線が通過する点が点 A となっているからである。点 A に対応する生産量 y^* が利潤最大化の結果選ばれる生産量であり，その時の利潤は図のようになっている。

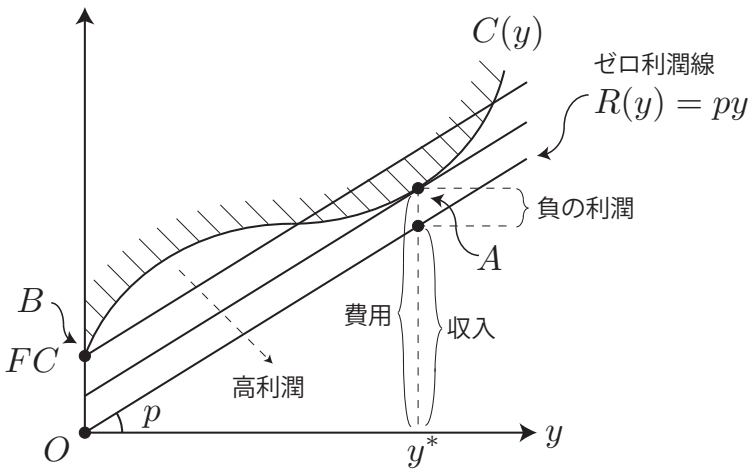
図の点 A のように，利潤が最大になる点では等利潤線と費用曲線が接している。費用曲線の接線の傾きは限界費用であったことを思い出すと，等利潤線の傾き p と限界費用 $MC(y^*)$ が等しくなることが，図から分かるので，利潤を最大にするための条件は $p = MC(y^*)$ であることが分かる。この $p = MC(y^*)$ は利潤最大化条件と呼ばれている。

点 A 付近をよく観察すると，限界費用が価格 p より大きい場合は点 A の右側となっており，逆に限界費用が価格 p より小さい状況は点 A の左側となっていることが分かる。したがって，限界費用が価格を上回るケースでは，生産量を減少させることで利潤が増え，限界費用が価格を下回るケースでは，生産量を増加させると利潤が増えることになる。そのため，利潤最大化条件が成立していない場合，生産量の調整により利潤を増やすことが可能となる。

■赤字でも生産するケース　現実の経済を見ると，赤字（利潤が負）であっても活動を続けている企業があることが分かる。あまり詳細に考えない場合，赤字になるのであれば活動をしなければ良いと考える人もいるだろう。このように赤字でも活動を続ける企業が存在する理由は，固定費用によって説明することができる。

先ほど説明した費用曲線と等利潤線を使った利潤最大化の図を思い出そう。また，企業が赤字になりやすいように，価格を低くしよう。すると，等利潤線の傾きが p であったので，等利潤線は水平に近づく。このように低価格の等利潤線を図示したものが，図 4.15 である。

図 4.15　最適な赤字



この図を理解するために，まず確認することは，原点 O は費用曲線の下側にあるので，選ぶことができないということである。これは，生産量がゼロの場合の費用 $C(0)$ は固定費用 FC に等しいためである。よって，生産量がゼロである場合の利潤は $y = 0$ を代入

することで，$\pi(0) = p \times 0 - C(0) = -FC$ となる。もし，正の生産量を選択することで，赤字となっている FC を減らすことができるならば，そのような生産を行うはずである。

実際，図 4.15 を見ると，生産量が $y = y^*$ となる点 A を通る等利潤線の方が，$y = 0$ となる点 B を通る等利潤線より下側にあることが分かる。また，点 A を通る等利潤線は原点 O を通る等利潤線より上側にあるので，利潤が負であることも分かる。以上により，価格がある程度低いが，極端に低いわけではない場合，利潤が負になっても生産量が正になる状況が存在することが分かる。

■練習問題

1. 利潤を最大にする生産量がゼロとなるような費用曲線と等利潤線を描きなさい。
2. 価格を少しずつ低下させていき，初めて最適な生産量がゼロとなる状況を考える。このような価格が平均可変費用の最小値と等しいことを図を用いて説明しなさい。
3. 図 4.7 の左側の図のように，生産量がゼロの場合，費用がゼロになり，生産量が正の場合，費用は曲線状の点となる状況を考える。このような場合，利潤が負となるにもかかわらず，正の生産量を選択するような状況は存在しないことを図から確認しなさい。