第 0 章

産業組織論で使う基礎モデル

更新日：2015 年 4 月 14 日

0.1 数学準備

ここでは、産業組織論の講義で用いる基礎的な数学の説明を行う。

0.1.1 2 次関数

産業組織論のモデルの中では，2 次関数がしばしば登場する。その理由は，逆需要関数が直線である場合，収入を表す式が 2 次関数となるためである。例えば，p を価格，x_1 を企業 1 の生産量，x_2 を企業 2 の生産量とする。この時，逆需要関数が $p = 1 - x_1 - x_2$ で与えられると，その時の企業 1 の収入は以下となる。

$$px_1 = (1 - x_1 - x_2)x_1 = -x_1^2 + (1 - x_2)x_1.$$

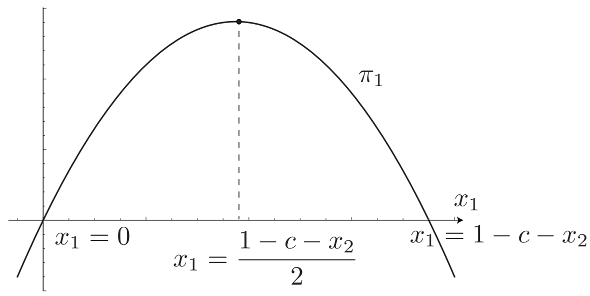
これは上の凸の 2 次関数である。

また，講義の中で企業は利潤最大化を行うため，2 次関数の最大化問題を解く場合がよくある。例えば，先ほどと似たような利潤を考えてみよう。ここで，p を価格，x_1 を企業 1 の生産量，x_2 を企業 2 の生産量，c を一定の限界費用としよう。このとき，企業 1 の利潤は次式となる。

$$\pi_1 = px_1 - cx_1 = (p - c)x_1 = (1 - x_1 - x_2 - c)x_1.$$

したがって，$\pi_1 = [(1-c-x_2) - x_1]x_1$ となる。このとき，$x_1 = 0$ および $x_1 = 1-c-x_2$ で $\pi_1 = 0$ となる。また，2 次関数が上に凸で軸に関して対称であることを考えると，最大値を与える x_1 は $\pi_1 = 0$ となる x_1 の値の中点である。したがって，$x_1 = (1 - c - x_2)/2$ で最大値 $(1 - c - x_2)^2/4$ をとる。この状況を図示したものが図 1 である。

図 1　2 次関数の最大化

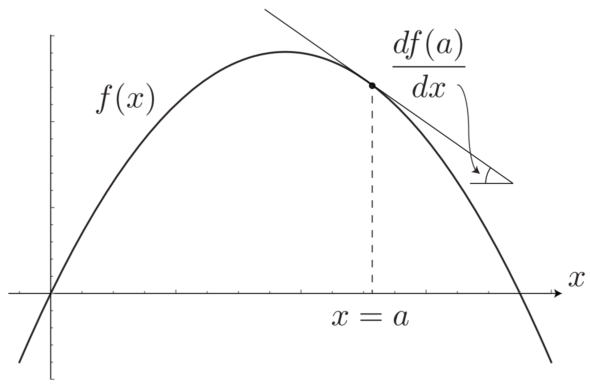


0.1.2　微分と偏微分

微分

2 次関数を最大化する場合，図を用いることもあるが，微分を使うことも有効である。最大化問題を解く場合に，微分が有用である理由は，微分が接線の傾きを表すからである。より正確に表現すると，「関数 $f(x)$ の導関数（微分）$df(x)/dx$ の $x = a$ における値 $df(a)/dx$ は，関数 $f(x)$ の $x = a$ における接線の傾きに等しい」となる[*1]。これを図示すると，次の図 2 となる。

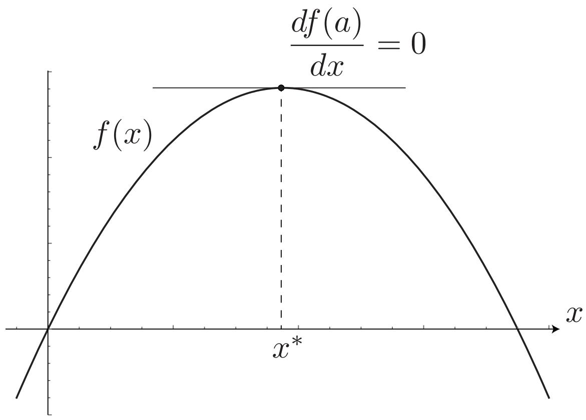
図 2　微分と接線の傾き



また，関数 $f(x)$ が最大化される場合，最大値を与える x では，接線の傾きがゼロになる。これは図 3 のようになっていることから理解できる。したがって，最大値を与える x を求めたい場合，$df(x)/dx = 0$ を x について解けば x^* を得ることができる。

[*1] ここで，$df(a)/dx$ は，関数 $f(x)$ を x で微分した後で，$x = a$ を代入していることに注意されたい。先に x_a を代入した後で，関数 $f(a)$ を x で微分すると，その値はゼロになる。

図 3　最大化と接線の傾き



■練習　微分を使って，利潤 $\pi_1 = [(1 - c - x_2) - x_1]x_1$ を x_1 について最大化してみよう。ここで，π_1 を x_1 で微分しゼロと置くと，次式を得る。

$$\frac{d\pi_1}{dx_1} = 1 - c - x_2 - 2x_1 = 0.$$

これを x_1 について解くと，π_1 を最大にする x_1 が得られる。

$$x_1 = \frac{1 - c - x_2}{2}.$$

偏微分

偏微分とは，ほかの変数を固定（一定に）したまま，ある変数を少し動かした場合の関数の変化を表したものである。関数 $f(x, y)$ を x で偏微分した場合，次のように表す。

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

偏微分の図的な意味は時間に余裕があれば説明する。

0.1.3　連立方程式と対称性

複数の変数を含む連立方程式を解く場合において，各方程式が対称ならば，その解を容易に得ることができる。例えば，次のような連立方程式を考えてみよう。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10, \\ 3x + 2y = 10. \end{cases} \tag{1}$$

この連立方程式では，上側の式における x と y を入れ替えると，下側の式に一致することが分かる。このように，方程式に含まれる変数を入れ替えると別の方程式と同じになる場合，この方程式には対称性があると言う。このとき，対称性を持つ方程式の解は変数間で

同じものとなる。例えば，上で示した連立方程式 (1) の解を z とすると，この方程式に $x = z$ および $y = z$ を代入することにより，次式を得る。

$$\begin{cases} 2z + 3z = 10, \\ 3z + 2z = 10. \end{cases}$$

これを解くと $z = 2$ となり，方程式の解は $x = y = 2$ を得る。

以上のように，方程式間に対称性がある場合，解が一致するという性質を利用すると便利である。

■**練習**　企業 1 の利潤を $\pi_1 = (1 - x_1 - x_2)x_1$，企業 2 の利潤を $\pi_2 = (1 - x_1 - x_2)x_2$ である場合を考える。利潤における生産量 x_1 と x_2 を入れ替えると，互いに同じ利潤になる。したがって，この利潤は企業間で対称となっていることが確認できる。また，各企業の利潤を最大にするための条件は，以下の通りである。

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 - x_2 = 0, \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 1 - x_1 - 2x_2 = 0.$$

すると，利潤最大化のための条件（1 階の条件）もまた対称であることが確認できる。この時，均衡において，各企業の生産量は一致するはずなので，$x_1 = x_2 = x^*$ をこの連立方程式に代入すると，$1 - 2x^* - x^* = 0$ を得る。これを x^* について解くと，$x^* = 1/3$ を得る。この結果は，対称性を使わずに解いた結果と一致することも簡単に確認できる。

0.2　同時手番のモデル

ここでは，企業が同時に行動する場合の競争について簡単に説明する。

0.2.1　差別化財の数量競争（クールノー競争）

まず，財が差別化されている場合の数量競争（クールノー競争）について考えるために，次のような市場を想定しよう。市場には 2 つの企業が存在している状況を仮定する。企業 1 の生産量を x_1，企業 2 の生産量を x_2 としよう。このとき，各企業は費用ゼロで生産を行うと仮定する。また，逆需要関数は次式で与えられることとする。

$$\begin{cases} p_1 = 1 - x_1 - \gamma x_2, \\ p_2 = 1 - x_2 - \gamma x_1, \end{cases}$$

ここで，γ は差別化の程度をあらわすパラメータである。γ がゼロに近づくと，各財の生産量の変化が他方の財の価格に影響を与えなくなる。したがって，このような場合，各財は全く異なる（独立した）財であるといえる。逆に，γ が 1 に近づくと，ある財の生産量が変化した場合と他方の財の生産量が変化した場合に価格に与える影響が同じになる。この場合，両財は同質的であると言える。

上記の仮定の下で，各企業の利潤は次式によって表される。

$$\begin{cases} \pi_1 = (1 - x_1 - \gamma x_2)x_1, \\ \pi_2 = (1 - x_2 - \gamma x_1)x_2. \end{cases}$$

このとき，利潤最大化条件は次式となる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 - \gamma x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 1 - 2x_2 - \gamma x_1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

ここで均衡生産量を求める話から脱線し，各企業の利潤最大化条件をその企業の生産量について解いてみる。すると，次式を得る。

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1 - \gamma x_2}{2}, \\ x_2 = \dfrac{1 - \gamma x_1}{2}. \end{cases}$$

この式は，相手の生産量を所与（与えられたもの）として，自分の最適な生産量を求める条件式となっている。このような式のことを，最適反応と呼ぶことにする。このモデルのでの最適反応を見ると，相手の生産量が増加した場合，自分の生産量を減少させるべきであることが分かる。このように，相手の変数が増加した場合，自分の変数を減少させるような関係のことを戦略代替と呼ぶ。

さて，均衡生産量の導出に戻ろう。既に求めた利潤最大化条件である (2) 式は対称であるので，$x_1 = x_2 = x^*$ をこの連立方程式に代入すると，$1 - 2x^* - \gamma x^* = 0$ を得る。これを x^* について解くと，均衡生産量を得る。

$$x^* = \frac{1}{2 + \gamma}.$$

0.2.2　差別化財の価格競争（ベルトラン競争）

ここでは，財が差別化されている場合の価格競争（ベルトラン競争）について考えてみよう。市場には 2 つの企業が存在し，各企業は費用ゼロで生産することができるとしよう。また，各企業の需要関数は次式で与えられるとする。

$$\begin{cases} x_1 = 1 - p_1 + \beta p_2, \\ x_2 = 1 - p_2 + \beta p_1. \end{cases}$$

相手の価格が上昇した場合，自分の需要は増えるはずであるので，β の前の符号は正となっている。このとき，企業の利潤は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \pi_1 = (1 - p_1 + \beta p_2) p_1, \\ \pi_2 = (1 - p_2 + \beta p_1) p_2. \end{cases}$$

利潤最大化条件は次式となる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 1 - 2p_1 + \beta p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 1 - 2p_2 + \beta p_1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

これを各企業の価格について解くと，最適反応を求めることができる。

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1+\beta p_2}{2}, \\ p_2 = \dfrac{1+\beta p_1}{2}. \end{cases}$$

最適反応の式から，相手の価格が上昇すると，自分の価格も上昇させるべきであることが分かる。このように，相手の変数が増加した場合，自分の変数も増加させるような関係のことを戦略補完と呼ぶ。

均衡価格を導出するために，(3) 式に戻る。この式を見ると，対称であることが分かるので，$p_1 = p_2 = p^*$ を (3) 式に代入すると，$1 - 2p^* + \beta p^* = 0$ を得る。これを p^* について解くと，均衡価格を得る。

$$p^* = \frac{1}{2-\beta}.$$

0.3　逐次手番の競争（シュタッケルベルグ競争）

産業組織論のモデルの中には，行動のタイミングが異なるものもある。その代表的な例として逐次手番の競争（シュタッケルベルグ競争）を考えてみよう。

市場には同質財を生産する 2 つの企業が存在し，各企業は費用ゼロで生産できるとする。市場の逆需要関数は $p = 1 - x_1 - x_2$ で与えられるとしよう。このとき，各企業の利潤は次式で与えられる。

$$\pi_1 = (1 - x_1 - x_2)x_1, \quad \pi_2 = (1 - x_1 - x_2)x_2.$$

企業の行動の順番は，まず企業 1 が生産量 x_1 を選択し，それを観察した後で企業 2 が生産量 x_2 を選択する。このように，行動の順番が異なる場合，均衡は後ろの順番の行動から解くことになる。このような均衡の求め方はバックワードインダクション（後ろ向き帰納法）と呼ばれる。

では，バックワードインダクションを用いて，均衡を求めてみよう。まず，後で行動する企業 2 の問題から考えよう。企業 2 の利潤最大化条件は次式となる。

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 1 - x_1 - 2x_2 = 0.$$

これを x_2 について解くと，次式を得る。

$$x_2 = \frac{1-x_1}{2}. \tag{4}$$

これは，企業 2 の最適反応である。

企業 2 の最適反応を企業 1 の利潤に代入すると，次式となる。

$$\pi_1 = \left(1 - x_1 - \frac{1-x_1}{2}\right)x_1 = \frac{1}{2}(1-x_1)x_1.$$

この式は x_1 に関して 2 次関数となっており，$x_1 = 0$ および $x_1 = 1$ で $\pi_1 = 0$ となることが分かる。したがって，π_1 を最大にする生産量はその中点である $x_1 = 1/2$ であることが分かる。これを企業 2 の最適反応 (4) 式に代入すると企業 2 の均衡生産量 $x_2 = 1/4$ を得る。

0.4　同質財価格競争

限界費用が一定であるが，企業ごとに異なる状況を考える。このとき，複数の企業が同質財価格競争をすると，均衡価格は 2 番目に小さい企業の限界費用に一致する。また，その際の需要は，最小の限界費用持つ企業のものとなり，その他の企業は財を販売することができなくなる。

例えば，n 企業存在する市場において，各企業の限界費用が $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ の順であったとしよう。すると，均衡価格は $p = c_2$ となり，企業 1 が全ての需要を獲得する。

また，2 企業のみが存在する市場では，限界費用の小さい企業が需要を獲得し，その際の価格は大きい方の限界費用に一致する。

■練習　2 つの企業が価格競争をしている市場を考える。各企業は同質的な財を生産しており，企業 1 の限界費用を c_1，企業 2 の限界費用を c_2 とし，$c_1 < c_2$ を満たすと仮定する。価格が p であった場合の需要は $x = 1 - p$ で与えられるとする。

上記の設定の下で，均衡では，限界費用の小さい企業 1 が価格を c_2 に等しくし，全ての需要獲得する。したがって，市場では $p = c_2$, $x = 1 - c_2$, $\pi_1 = (1 - c_2)c_2$, $\pi_2 = 0$ が実現する。